

Баширцева И.А., Мизгирева Т.Д.

## АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

*Аннотация.* Рассматривается стохастическая динамика модели Ван-дер-Поля электронного осциллятора с жестким возбуждением. Для исследования случайных колебаний используется новый полуаналитический подход, который сочетает метод функций стохастической чувствительности и компьютерную визуализацию доверительных областей. Конструктивные возможности такого подхода демонстрируются в анализе индуцированных шумом явлений срыва и генерации автоколебаний.

*Ключевые слова:* стохастическая динамика, генератор Ван-дер-Поля, стохастическая чувствительность.

*Abstract.* We consider the stochastic dynamics of the Van der Pol generator with hard excitation. To investigate random oscillations, a new semi-analytic approach is used that combines the method of stochastic sensitivity functions and computer visualization of confidence domains. The constructive possibilities of this approach are demonstrated in the analysis of noise-induced phenomena of quenching and generation of self-oscillations.

*Keywords:* stochastic dynamics, van der Pol generator, stochastic sensitivity.

### Введение

Осциллятор Ван-дер-Поля [1] был предложен голландским инженером и физиком Бальтазаром Ван-дер-Полем, и является одной из важных моделей в нелинейной динамике, описывающих колебания в электронных генераторах.

Генератор Ван-дер-Поля задается следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \delta f(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $f(x)$  – нелинейная функция, описывающая режим работы автогенератора.

Когда  $f(x) = 1 - x^2$ , уравнение описывает мягкий режим работы, а при  $f(x) = \alpha + \beta x^2 - \gamma x^4$  – жесткий режим работы лампового генератора.

В работе разобран случай жесткого режима лампового генератора Ван-дер-Поля.

### Детерминированная модель

Будем рассматривать уравнение Ван-дер-Поля в виде:

$$\ddot{x} + \delta(\alpha + \beta x^2 - \gamma x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где зафиксируем два параметра:  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$  и перепишем уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \delta(-1 + 2x^2 - \gamma x^4)y - x \end{cases} \quad (1)$$

Система имеет единственную точку покоя (0,0). Матрица системы первого приближения будет иметь вид:  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ .

При  $\delta > 0$  положение равновесия устойчиво, а при  $\delta < 0$  – неустойчиво. При  $\delta > 0$  и  $\gamma < 0.5$  система является бистабильной, то есть наряду с устойчивым равновесием здесь присутствует и устойчивый предельный цикл. Бассейны притяжения равновесия и предельного цикла разделены траекторией неустойчивого предельного цикла.

### Стохастическая модель

Как известно, любая реальная система функционирует в условиях неизбежно присутствующих возмущений разной природы. В работе рассматривается случай, когда на осциллятор действуют случайные возмущения.

Осциллятор Ван-дер-Поля со случайными возмущениями имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \delta(-1 + 2x^2 - \gamma x^4)y - x + \varepsilon \xi \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – интенсивность шума, а  $\xi$  – случайная гауссова величина.

Под воздействием случайных возмущений вокруг точки покоя формируется разброс в виде облака, также формируется пучок вокруг предельного устойчивого цикла. Величина такого разброса зависит как от интенсивности  $\varepsilon$ , так и от характеристики, называемой стохастической чувствительностью точки покоя или предельного цикла. Рассмотрим сначала случай устойчивого равновесия.

### Стохастическая чувствительность равновесия

Матрица стохастической чувствительности  $W$  равновесия  $\bar{x}$  системы  $\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x)\xi$  является решением такого уравнения:

$$FW + WF^T + S = 0, \text{ где } F = f'_x(\bar{x}), \quad S = \sigma(\bar{x})\sigma^T(\bar{x})$$

Для системы уравнений (2), матрица стохастической чувствительности находится из решения системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Откуда  $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\delta} \end{pmatrix}$ , и её собственные значения матрицы  $W$  будут

равны  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\delta}$ , а собственные векторы  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Равновесие  $(0,0)$  устойчиво при  $\delta > 0$  значит, матрица  $W$  – положительно определенная.

По собственным значениям  $(\lambda_1, \lambda_2)$  и собственным нормализованным векторам  $(v_1, v_2)$  матрицы стохастической чувствительности строим доверительный эллипс около точки покоя. Его уравнение в координатах  $z_1 = (x - \bar{x}, v_1)$ ,  $z_2 = (x - \bar{x}, v_2)$  имеет вид:

$$\frac{z_1^2}{\lambda_1} + \frac{z_2^2}{\lambda_2} = 2k^2 \varepsilon^2,$$

где  $k^2 = -\ln(1-P)$ ,  $P$  – доверительная вероятность. Это означает, что случайные состояния стохастической системы находятся внутри эллипса с вероятностью  $P$ .

### Стохастическая чувствительность предельного цикла

Рассмотрим случай, когда аттрактором системы является предельный цикл. Предельный цикл может быть задан  $T$ -периодическим решением  $x = \xi(t)$ , где  $x_0 = \xi(0)$  – фиксированная точка цикла.

Рассмотрим краевую задачу [2]:

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), m(0) = m(T),$$

где  $a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t)$ ,  $b(t) = p^T(t)S(t)p(t)$ ,  $p(t)$  – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору  $f(\xi(t))$ , а, следовательно, и циклу в точке  $\xi(t)$ .  $T$ -периодическая скалярная функция  $m(T) > 0$ , задающая разброс пучка по нормали  $p(t)$  к циклу, является функцией стохастической чувствительности цикла. Функция  $m(t)$  позволяет построить доверительную полосу вокруг детерминированного цикла. Границы этой доверительной полосы могут быть записаны в явном параметрическом виде:

$$x_{1,2}(t) = \xi(t) \pm k\varepsilon \sqrt{2m(t)} p(t),$$

где коэффициент  $k$  связан с доверительной вероятностью  $P$  формулой

$$k = \text{erf}^{-1}(P), \text{ где } \text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Случайные состояния располагаются в границах доверительной полосы с вероятностью  $P$ .

### Индукцированные шумом переходы

Кроме того, что с помощью техники можно описывать случайные состояния вокруг аттракторов, также можно проводить анализ различного рода индуцированных шумом переходов в бистабильных системах.

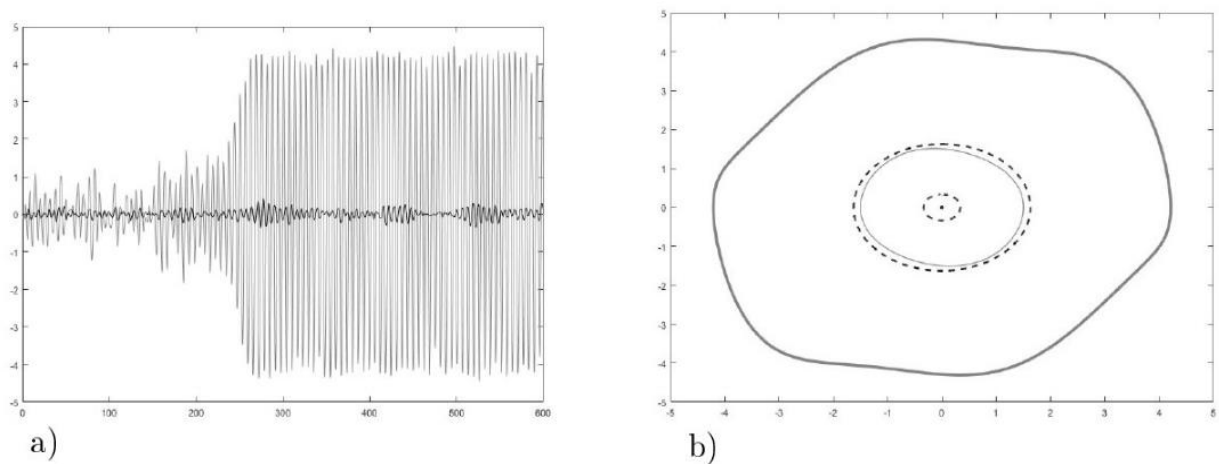


Рисунок 1 – Индуцированное шумом возбуждение колебаний

Рассмотрим явление индуцированного возбуждения стохастических колебаний. В рассматриваемой системе при малом шуме, если мы стартуем с равновесия, случайные состояния концентрируются вокруг этого равновесия (см. Рис. 1а, черная траектория для  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\gamma = 0.2$ ). Но если шум превышает некоторое пороговое значение, случайные состояния могут перепрыгнуть за сепаратрису (неустойчивый цикл) и попасть в область притяжения предельного цикла. Тогда в системе малоамплитудных колебаний около равновесия формируются стохастические колебания большей амплитуды (см. Рис. 1а, серая траектория для  $\varepsilon = 0.24$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\gamma = 0.2$ ). В качестве критерия такого перехода можно использовать соотношение границы доверительного эллипса с сепаратрисой. На Рисунке 1б видно, что при  $\varepsilon = 0.05$  эллипс целиком содержится в бассейне притяжения, а при  $\varepsilon = 0.24$  – захватывает точки притяжения предельного цикла.

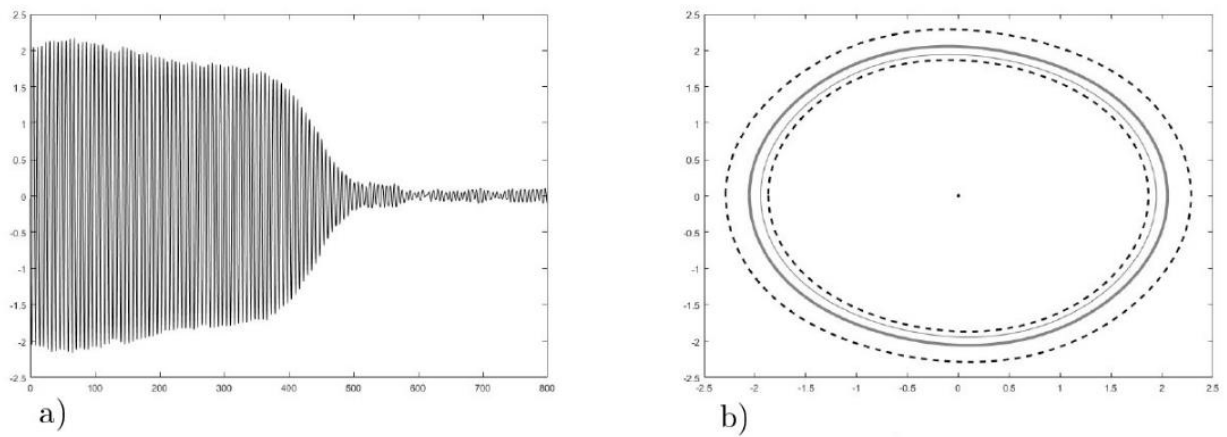


Рисунок 2 – Индуцированное шумом затягивание колебаний

Рассмотрим случай, когда начальная точка лежит на предельном цикле. При малом шуме все состояния сконцентрированы около предельного цикла. Однако, тоже существует некоторое пороговое значение шума, при котором случайная траектория может пересечь сепаратрису и попасть в область притяжения устойчивого равновесия. Тогда в системе вместо большеамплитудных колебаний наблюдаются малоамплитудные колебания около равновесия (см. Рис. 2 для  $\varepsilon = 0.15$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\gamma = 0.5$ ). Такой эффект может называться затягиванием колебаний. Его можно проанализировать с помощью анализа взаимного расположения доверительной полосы и неустойчивого предельного цикла. Как видно из Рисунка 2б, вовнутрь доверительной полосы уже попали точки притяжения устойчивого равновесия, поэтому в данной системе с ненулевой вероятностью осуществляется переход стохастической траектории на устойчивое равновесие.

Кроме того, при определенном соотношении эти доверительных областей может наблюдаться и еще триггерный режим, когда система, например, стартующая с равновесия переходит на предельный цикл, но потом возвращается в зону притяжения равновесия и так далее. Тогда в системе наблюдаются колебания смешанных амплитуд. Используя взаимное отношение доверительной полосы, доверительного эллипса и неустойчивого предельного цикла мы можем сказать, при какой интенсивности происходит такое явление.

### Заключение

Таким образом, аппарат функции стохастической чувствительности и доверительных областей может быть эффективно использован не только в описании разброса случайных состояний вокруг аттракторов, а также в

анализе новых индуцированных шумом явлений, которые наблюдаются в объектах разной природы в том числе и в электронных осциляторах.

***Библиографический список***

1. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – Москва : Физматгиз, 1959. – 916 с.
2. Bashkirtseva I. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos. – 2011. – Vol. 21, I. 4. – P. 047514.